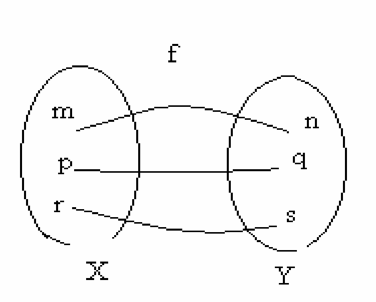
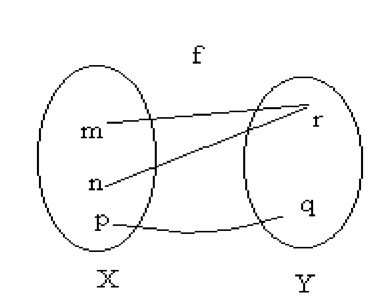
Funzioni 1

Una funzione *f* da X in Y è costituita da una terna di elementi
1) un insieme X, detto **dominio** di *f*
2) un insieme Y, detto **codominio** di *f*
3) una **legge** che ad un elemento *x* di X associa al più un unico elemento $f(x)$ di Y.

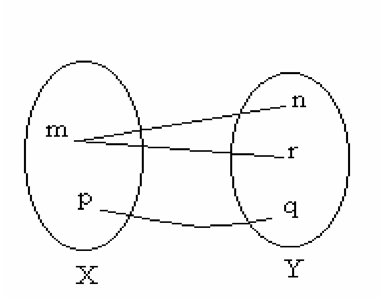
Nel caso, in cui *X*,*Y* siano sottinsiemi di *R*, generalmente si indica con
D il campo di esistenza, o anche insieme di definizione di una funzione *f*, che è il più ampio sottoinsieme di *R* costituito da tutti e soli i valori della *x* per cui esistano ben definiti i corrispondenti valori di *y = f(x)*. (Ad esempio, nel caso di una frazione occorre porre il denominatore diverso da zero); Il **codominio C** di *f* invece è il sottoinsieme di *R* costituito da tutti gli elementi y corrispondenti dei punti *x* appartenenti al dominio della funzione
Si dice che *x* la variabile **indipendente**, mentre *f*(*x*) o *y* è la **variabile dipendente**.



f è una funzione



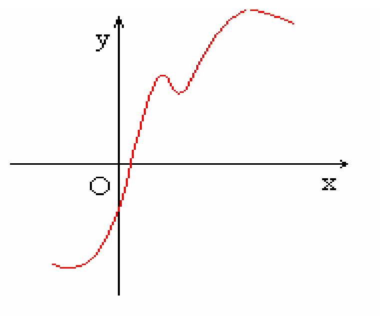
f è una funzione



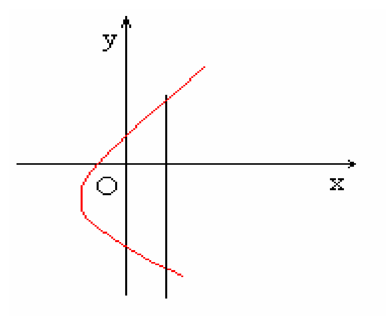
f non è una funzione

Data una **funzione** $f: X \to Y$ si chiama **grafico** di f l' insieme (x, y) dei punti soddisfacenti la condizione $y = f(x)$

Se consideriamo il grafico di una funzione: *f*: **R** → **R** ogni retta verticale interseca il grafico della funzione al più una volta.

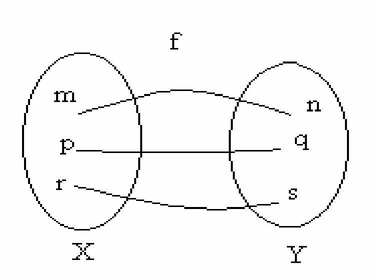


è il grafico di una funzione

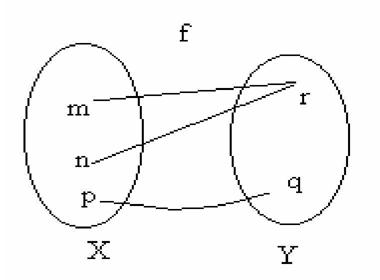


non è il grafico di una funzione

L'insieme degli $y \in R$ per i quali esiste un $x \in R$ tale che $y = f(x)$ si dice *immagine* di *f*.
Una funzione *f*: X → Y si dice *iniettiva* se $\forall x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ segue che $f(x_1) \neq f(x_2)$

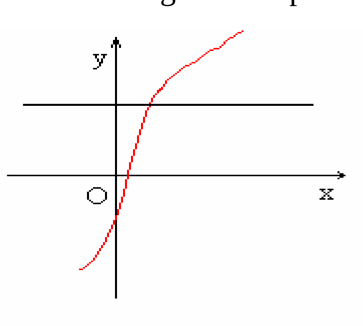


f è iniettiva

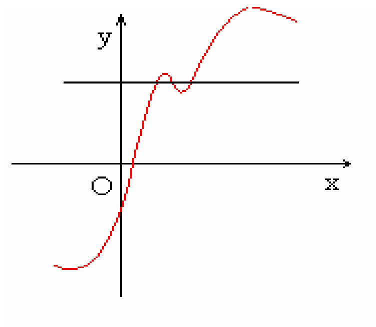


f non è iniettiva

Se consideriamo il grafico di una funzione: f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ si può osservare che f è iniettiva se ogni retta orizzontale incontra il grafico al più una sola volta.

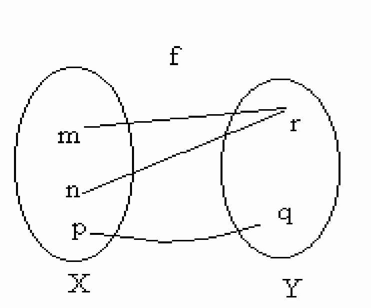


f è iniettiva

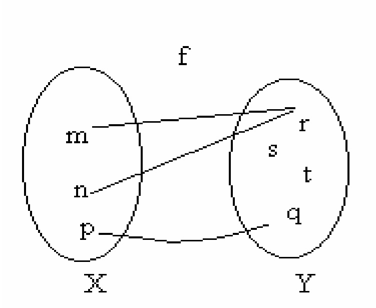


f non è iniettiva

Una funzione f: X $\to$ Y si dice *suriettiva* se per ogni $y \in Y$ esiste almeno un $x \in X$ tale che $f(x) = y$.

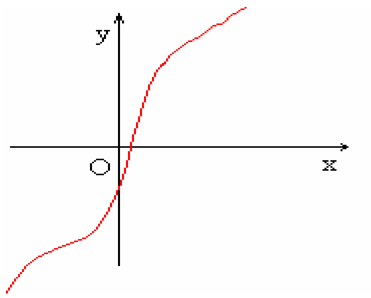


f è suriettiva

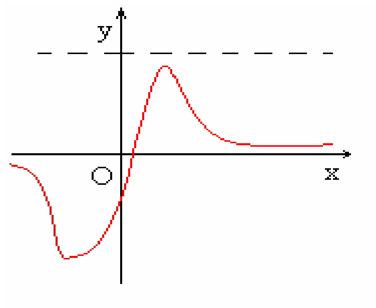


f non è suriettiva

Considerando le funzioni f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dal grafico si può osservare che f è suriettiva se ogni retta orizzontale incontra il grafico almeno una volta.



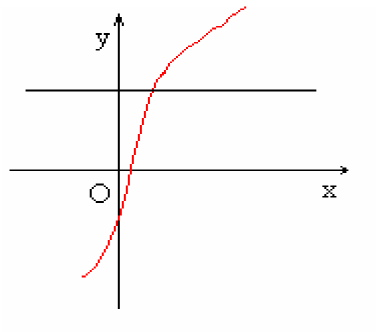
f è suriettiva



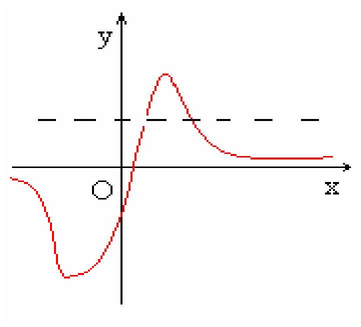
f non è suriettiva

Una funzione f: X $\to$ Y si dice *biiettiva* o *biunivoca* se è suriettiva e iniettiva, cioè se per ogni $y \in Y$ esiste uno ed un solo $x \in X$ tale che $f(x) = y$.

Considerando le funzioni f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dal grafico si può osservare che f è *biunivoca* se ogni retta orizzontale incontra il grafico una e una sola volta.

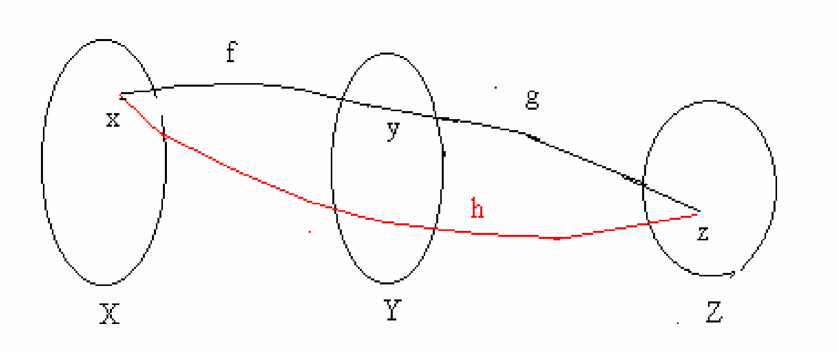


f è biunivoca



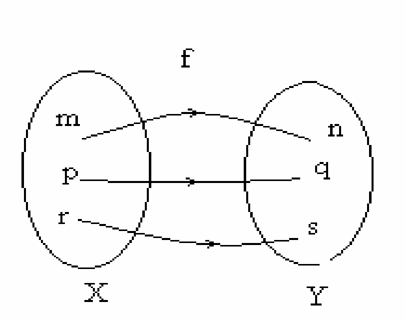
f non è biunivoca

Date due funzioni *f*: X $\rightarrow$ Y *e g*: $Y \rightarrow Z$ *si* definisce *funzione composta* e si indica con $g \circ f$ la funzione *h*: $X \rightarrow Z$ tale che $h(x) = g(f(x))$



osserviamo che : $y = f(x)$, $z = g(y)$, quindi $z = g(f(x))$, $z = h(x)$.

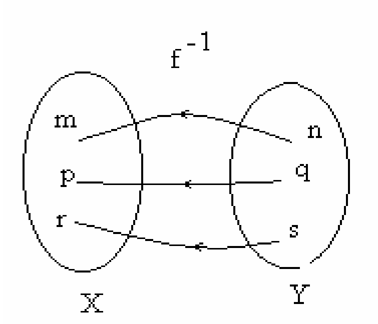
Data *f*: X $\rightarrow$ Y, biunivoca, si definisce sua funzione inversa e si indica con f^{-1} la funzione f^{-1}: $Y \rightarrow X$ tale che $f^{-1}(y) = x$ *se* $f(x) = y$.



$f(m) = n$

$f(p) = q$

$f(r) = s$

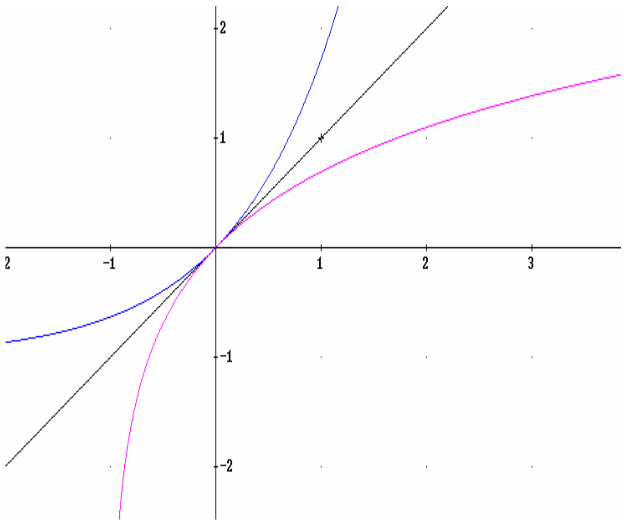


$f^{-1}(n) = m$

$f^{-1}(q) = p$

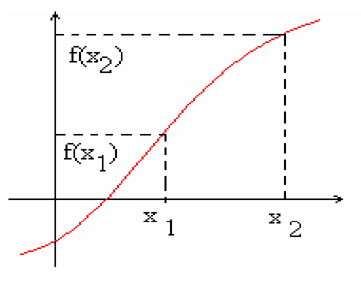
$f^{-1}(s) = r$

Considerando le funzioni *f*: $\boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$
dal grafico si può osservare che
se il punto di coordinate $(x, y) \in f$
allora il punto di coordinate $(y, x) \in f^{-1}$,
quindi il grafico della funzione inversa sarà simmetrico di quello della funzione stessa rispetto alla bisettrice $y = x$



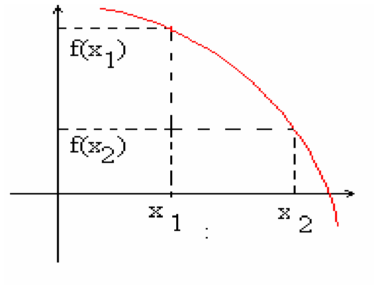
Data $f : X \rightarrow \boldsymbol{R}$ diciamo che *f* è *crescente*
se $\forall x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$ è:
$f(x_1) < f(x_2)$

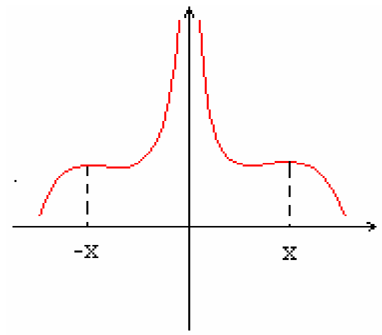
Graficamente si ha:



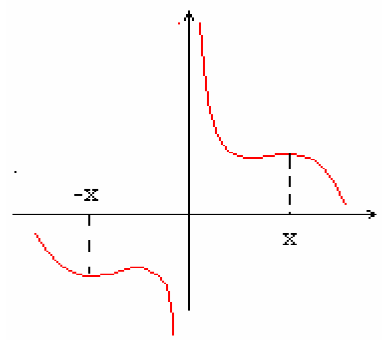
Data $f: X \to R$ diciamo che f è *decrescente* se
$\forall x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$ è: $f(x_1) > f(x_2)$.

Graficamente si ha:

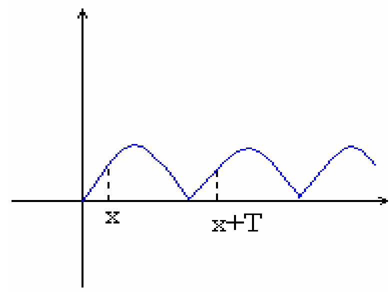




Una funzione $f : X \to \boldsymbol{R}$ definita su un dominio X simmetrico si dice ***pari***
se per $\forall x \in X$ è: $f(-x) = f(x)$



Una funzione $f : A \to \boldsymbol{R}$ definita su un dominio X simmetrico si dice ***dispari***
se per ogni $\forall x \in X$ è: $f(-x) = -f(x)$



Una funzione $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ si dice
periodica di periodo T
se $\forall x \in R$ è: $f(x+T) = f(x)$

Definizione:

- una funzione $f: X \to Y$, con $X, Y \subset \boldsymbol{R}$ si dice *limitata* se *f*(*X*) è limitato, cioè se $\exists\, c, C :$ $c \leq f(x) \leq C,\ \forall x \in X$.
- una funzione $f: X \to Y$, con $X, Y \subset \boldsymbol{R}$ si dice *limitata superiormente* se *f*(*X*) è limitato superiormente, cioè se $\exists\, C :$ $f(x) \leq C,\ \forall x \in X$.
- una funzione $f: X \to Y$, con $X, Y \subset \boldsymbol{R}$ si dice *limitata* inferiormente se *f*(*X*) è limitato inferiormente, cioè se $\exists\, c :$ $f(x) \geq c,\ \forall x \in X$.

LEGENDA
D = dominio della funzione
C = codominio della funzione

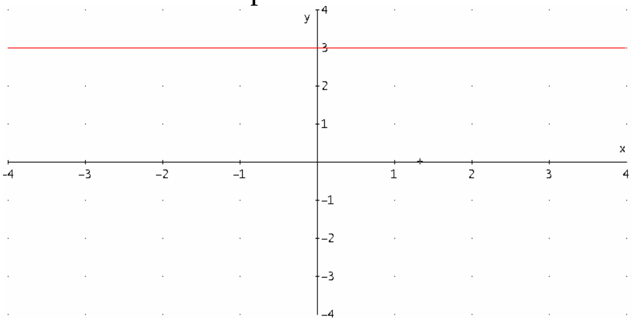
FUNZIONI ALGEBRICHE

Funzione costante

$y = c$

D = R   C = {c}

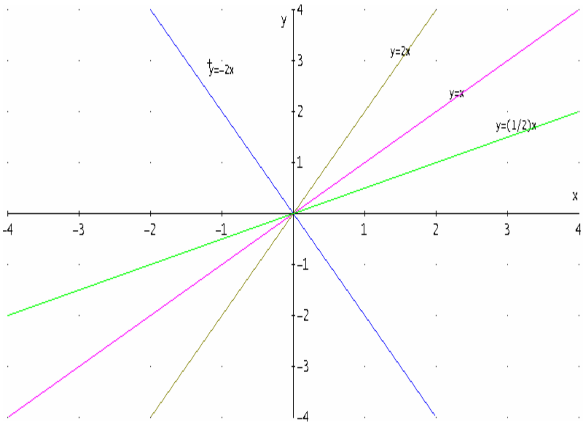
Retta parallela all'asse



Funzione lineare (Funzione di 1° grado)

$y = mx$

$D = R \qquad C = R$

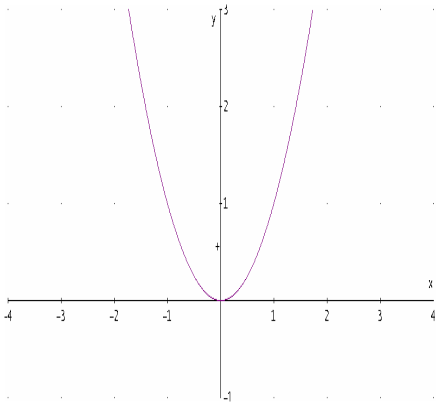


- Funzione dispari
- Con $m \neq 0$ esiste $f^{-1} : x = y/m$ da cui
  $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{m}x$
- Funzione illimitata sia inferiormente che superiormente

Parabola (Funzione di 2° grado)

$y = x^2$

$D = R \qquad C = [0, +\infty)$

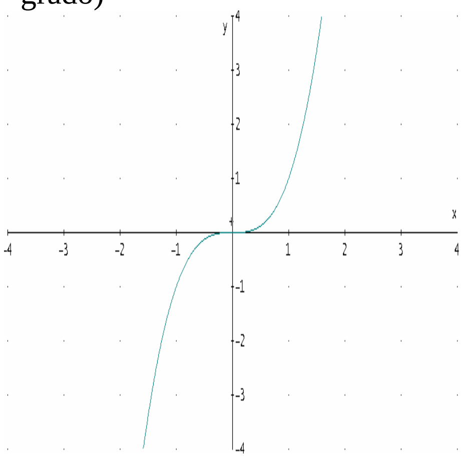


- Funzione pari
- Non esiste f^{-1} su *R*, la funzione è invertibile per $x \geq 0$ aut per $x \leq 0$
- La funzione è decrescente per $x \leq 0$, e crescente per $x \geq 0$
- Funzione limitata inferiormente e illimitata superiormente

Cubica (Funzione di 3° grado)

$y = x^3$

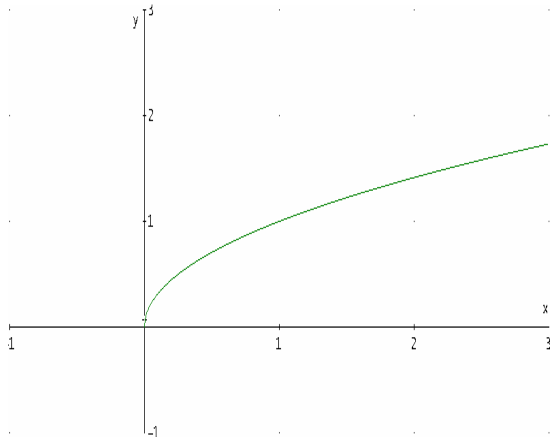
$D = R \quad C = R$



- Funzione dispari
- Funzione biunivoca
- Esiste f^{-1} : $x = \sqrt[3]{y}$ da cui $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$
- La funzione è monotona crescente
- Funzione illimitata sia inferiormente che superiormente

$$y = \sqrt{x}$$

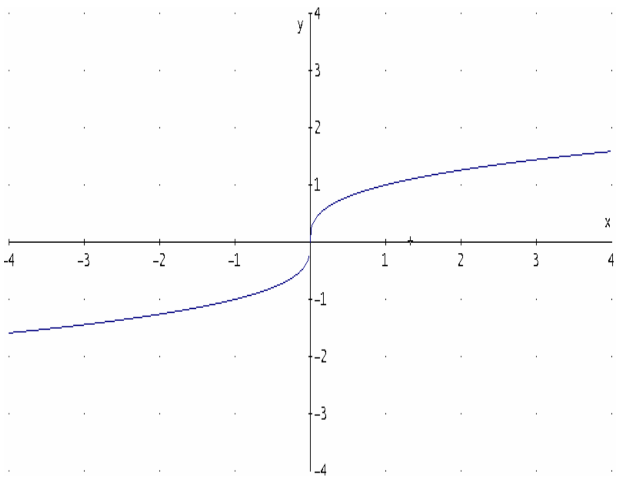
$$D = [0,+\infty) \qquad C = [0,+\infty)$$



- Esiste f^{-1} : $x = y^2$ da cui $f^{-1}(x) = x^2$
- La funzione è crescente
- Funzione limitata inferiormente e illimitata superiormente

$$y = \sqrt[3]{x}$$

$$A = R \qquad C = R$$

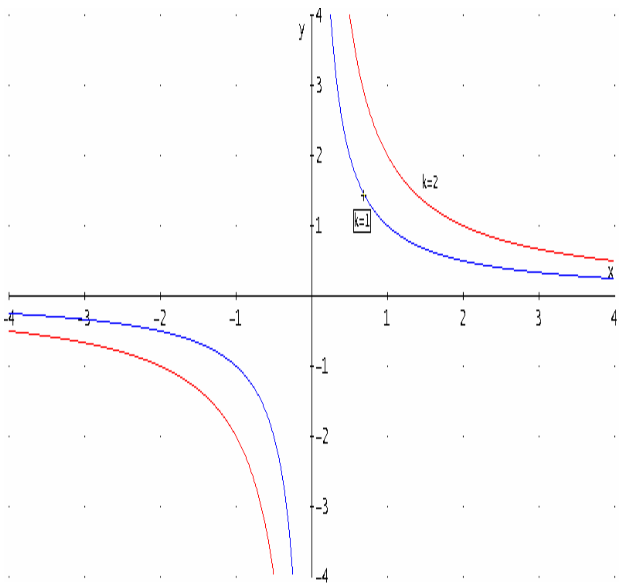


- Funzione dispari
- Funzione biunivoca
- Esiste f^{-1} : $x = y^3$ da cui $f^{-1}(x) = x^3$
- La funzione è monotona crescente
- Funzione illimitata sia superiormente che inferiormente

Iperbole equilatera

$$y = \frac{k}{x}$$

$$D = R - \{0\} \qquad C = R - \{0\}$$

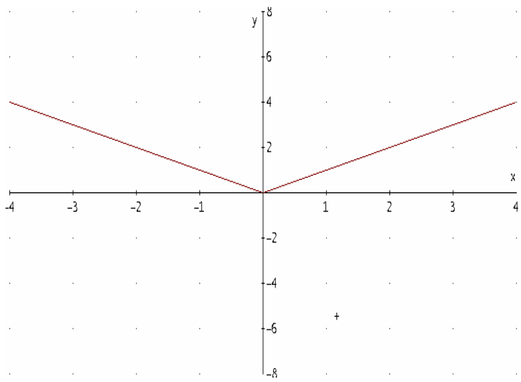


- Funzione dispari
- Esiste f^{-1} : $x = k / y$ con $x \neq 0$ e $y \neq 0$
- La funzione è decrescente per $x < 0$, è decrescente per $x > 0$ non è decrescente nel suo dominio
- Funzione illimitata sia superiormente che inferiormente

Funzione valore assoluto

$$y = |x|$$

$D = R \qquad C = [0,+\infty)$



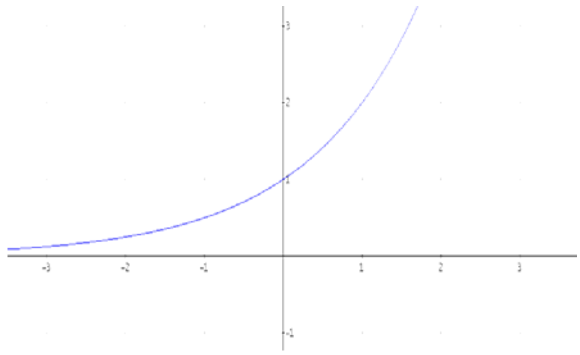
- Funzione pari
- Non esiste f^{-1}
- La funzione è decrescente per $x < 0$ e crescente per $x > 0$
- Funzione limitata inferiormente e illimitata superiormente

FUNZIONI TRASCENDENTI

Funzione esponenziale $y = a^x$

$a > 1$ funzione crescente $\quad x > y \Rightarrow a^x > a^y$

$D = R \qquad C = [0,+\infty)$

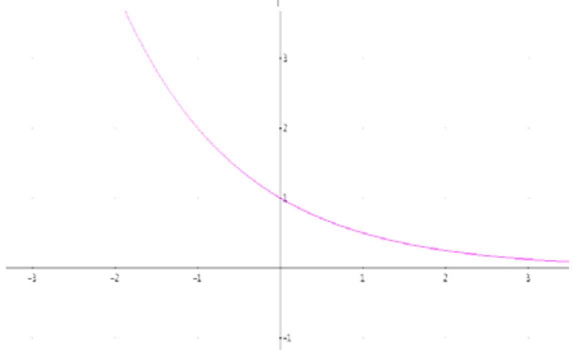


- Funzione biunivoca in D
- Esiste f^{-1} : $x = \log_a y$ da cui

  $f^{-1}(x) = \log_a x$
- Funzione monotona crescente
- Funzione limitata inferiormente e illimitata superiormente

$0 < a < 1 \quad x > y \Rightarrow a^x < a^y$

$D = R \qquad C = [0,+\infty)$



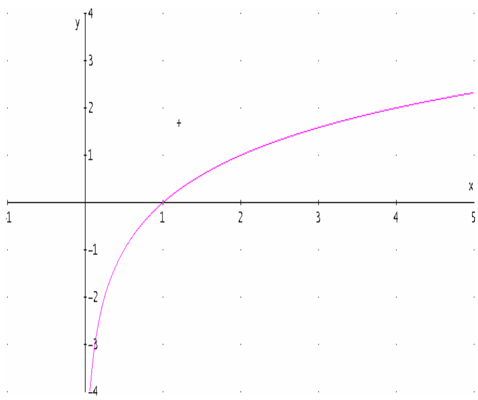
- Funzione biunivoca in D
- Esiste f^{-1} : $x = \log_a y$ da cui

  $f^{-1}(x) = \log_a x$
- Funzione monotona decrescente
- Funzione limitata inferiormente e illimitata superiormente

Funzione logaritmica $y = \log_a x$

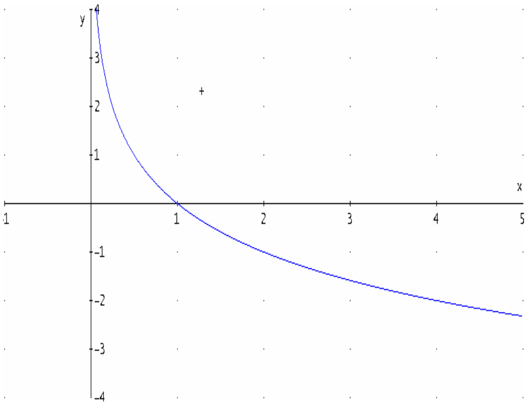
$a > 1$

$D = [0,+\infty) \qquad C = R$



- Funzione biunivoca in D
- Esiste f^{-1} : $x = a^y$ da cui $f^{-1}(x) = a^x$
- Funzione monotona crescente
- Funzione illimitata sia superiormente che inferiormente

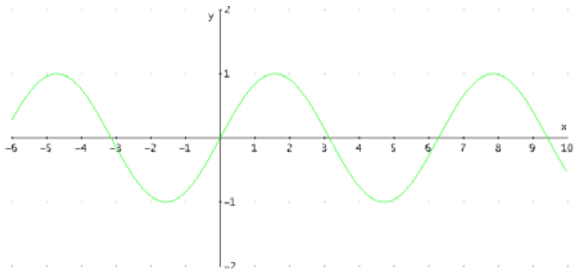
$$0 < a < 1$$
$$D = [0, +\infty) \qquad C = R$$



- Funzione biunivoca in D
- Esiste $f^{-1}: x = a^y$ da cui $f^{-1}(x) = a^x$
- La funzione è monotona decrescente
- Funzione limitata sia superiormente che inferiormente

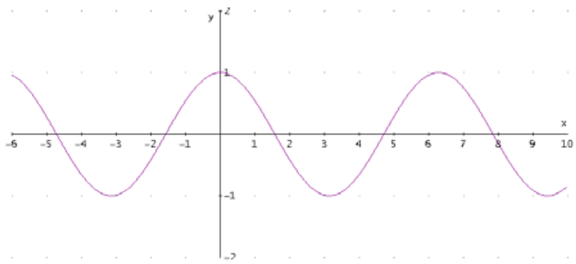
Funzioni goniometriche

$$y = senx$$
$$D = R \qquad C = [-1;1]$$



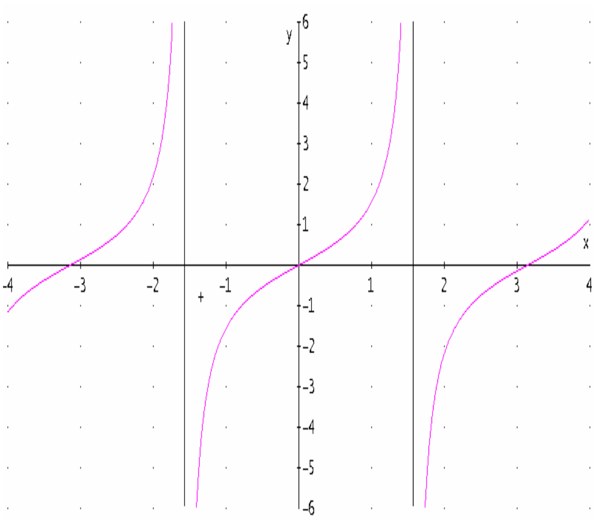
- Funzione periodica di periodo 2π
- Funzione dispari
- Per $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ esiste $f^{-1}: x = arcseny$ da cui $f^{-1}(x) = arcsenx$
- Funzione limitata sia superiormente che inferiormente

$$y = \cos x$$
$$\mathrm{D} = \mathrm{R} \qquad C = [-1;1]$$



- Funzione periodica di periodo 2π
- Funzione pari
- Per $0 \le x \le \pi$ esiste $f^{-1}: x = \arccos y$ da cui $f^{-1}(x) = \arccos x$
- Funzione limitata sia superiormente che inferiormente

$$y = tgx$$
$$D = R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\} \qquad C = R$$



- Funzione periodica di periodo π
- Funzione dispari
- Per $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ esiste $f^{-1}: x = arctgy$ da cui $f^{-1}(x) = arctgx$
- Funzione illimitata