Terzo modulo: Geometria
Obiettivi

1. conoscere i concetti fondamentali della geometria sintetica del piano (poligoni, circonferenza e cerchio, ecc.)
2. calcolare perimetri e aree di figure elementari nel piano
3. conoscere le nozioni fondamentali della geometria analitica del piano
4. conoscere equazioni e disequazioni che definiscono semplici luoghi geometrici (circonferenza, ellisse, parabola, iperbole, ecc.)
5. tradurre analiticamente semplici proprietà e problemi geometrici

Prerequisiti

1. equazioni, disequazioni, sistemi
2. concetto di piano cartesiano

PARTE A: GEOMETRIA SINTETICA PIANA

1 I triangoli

Il triangolo è una figura geometrica piana. Dati tre punti non allineati esso viene definito come la porzione di piano racchiusa all'interno dei tre segmenti che congiungono, ciascuno, una coppia diversa dei punti dati. Tali segmenti sono detti lati, mentre i punti congiunti sono detti vertici. I triangoli possono essere classificati in base alla lunghezza dei lati:

- In un triangolo equilatero tutti i lati hanno lunghezza uguale.
  Un triangolo equilatero è anche equiangolare, ovvero i suoi angoli interni sono tutti pari a 60°.
- In un triangolo isoscele due lati hanno lunghezza uguale.
  Un triangolo isoscele ha anche due angoli interni uguali.
- In un triangolo scaleno tutti i lati hanno lunghezze differenti.
  Gli angoli interni di un triangolo scaleno sono tutti differenti.

I triangoli possono essere classificati anche in base alle dimensioni del loro angolo interno più ampio. Ad esempio, un triangolo rettangolo ha un angolo interno di 90° (angolo retto). Il lato opposto all'angolo retto è detto ipotenusa; è il lato più lungo del triangolo rettangolo. Gli altri due lati del triangolo sono detti cateti.

Proprietà dei triangoli
In ogni triangolo valgono le seguenti proprietà:

- La somma degli angoli interni è uguale ad un angolo piatto (180°).
- Ogni lato è minore della somma degli altri due lati (disuguaglianza triangolare) ed è maggiore della differenza degli altri due ($a + b > c \Leftrightarrow a > b - c$).

Area del triangolo
L'area o superficie di un triangolo è data da $S = \frac{1}{2}bc$, dove b è la lunghezza di un lato qualunque del triangolo (la base) e h è l'altezza relativa al lato, ovvero la distanza perpendicolare tra la base in esame ed il vertice opposto ad essa.

2 I quadrilateri

Tutti i quadrilateri hanno quattro vertici e quattro angoli interni; la somma delle ampiezze degli angoli interni di ogni quadrilatero è uguale a 360°.
Si distinguono vari tipi di quadrilateri:

- *Quadrilatero convesso*
  E' una figura piana di quattro lati convessa, cioè una figura piana che per ogni coppia di punti interni contiene tutti i punti del segmento di cui essi sono le estremità.
  Tutti gli angoli interni di un quadrilatero convesso hanno ampiezza inferiore a 180°.

- *Quadrilatero non convesso*
  E' una figura piana di quattro lati non convessa, cioè una figura piana che contiene due punti tali che il segmento che li congiunge possiede punti che non appartengono alla figura stessa.
  Almeno un angolo interno di un quadrilatero non convesso (in realtà uno solo) ha ampiezza maggiore di 180°.
  I quadrilateri non convessi sono caratterizzati anche dal fatto che prolungando due loro lati si ottengono punti interni alla figura.

Classificazione dei quadrilateri convessi:

- *Trapezio*
  E' un quadrilatero che presenta una coppia di lati paralleli.

- *Parallelogramma*
  E' un quadrilatero che presenta i lati a due a due paralleli.
  Si tratta di un caso particolare di trapezio.

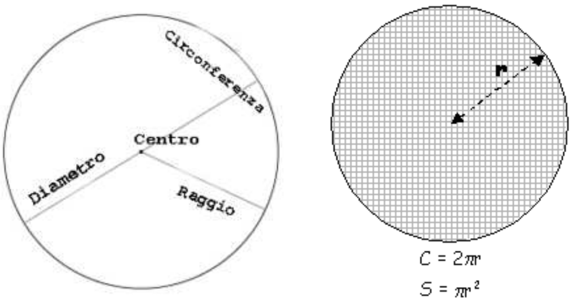
- *Rombo*
  E' un parallelogramma con i lati congruenti.
  Esso presenta le due diagonali ortogonali e intersecantesi nel loro punto di mezzo.

- *Rettangolo*
  E' un parallelogramma che possiede quattro angoli interni retti.

- *Quadrato*
  E' sia rettangolo che rombo, quindi presenta 4 angoli retti e 4 lati uguali e paralleli 2 a 2.

3 Il cerchio

Il cerchio è il luogo dei punti del piano aventi una distanza minore o uguale ad una misura r, detta raggio del cerchio, da un punto detto centro del cerchio.
La circonferenza invece è il luogo dei punti del piano aventi distanza dal centro uguale al raggio.



Data una corda, ognuna delle due parti in cui questa divide il cerchio si chiama segmento circolare.
Un segmento circolare può anche essere la parte di cerchio compresa tra due corde parallele.
L'intersezione fra un angolo al centro, cioè un angolo avente come vertice il centro del cerchio, ed il cerchio stesso (visivamente, uno "spicchio" di cerchio) si chiama settore circolare.
L'area compresa fra le due circonferenze concentriche si chiama corona circolare.

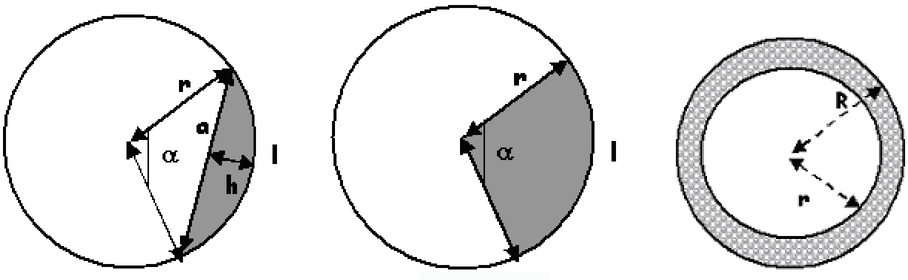
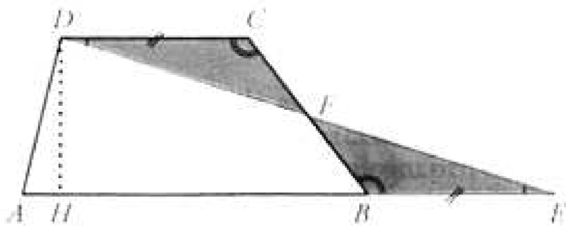


Figure 1: segmento circolare - settore circolare - corona circolare

4 Superfici delle figure piane
Ogni figura geometrica delimita una porzione (superficie) del piano sul quale insiste.
I parametri necessari per il calcolo delle aree delle figure piane sono le lunghezza dei lati, della base, dell'altezza, dell'apotema etc.
L'area di un rettangolo (e di un parallelogramma) è calcolabile tramite il prodotto tra la base e l'altezza.
Un triangolo è equivalente alla metà di un parallelogramma con la stessa base e la stessa altezza.
Le altre figure possono essere scomposte i triangoli.
Poni attenzione al caso del trapezio che risulta equivalente ad un rettangolo che ha per base la somma delle basi e per altezza l'altezza del trapezio.



Formule per il calcolo delle aree delle principali figure piane
Indichiamo la base di una figura piana con la lettera b, l'altezza con la lettera h, il lato con la lettera l. L'area è indicata dalla lettera A.

- Quadrato: $A = l^2$
- Rettangolo e parallelogramma: $A = b \cdot h$
- Triangolo: $A = \frac{b \cdot h}{2}$
- Trapezio: $A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$
  dove B rappresenta la base maggiore e b quella minore
- Rombo: $A = b \cdot h$ oppure $A = \frac{D \cdot d}{2}$
  dove D rappresenta la base maggiore e d quella minore
- Poligono regolare: $A = \frac{p \cdot a}{2}$
  dove p rappresenta il perimetro ed a l'apotema
- Cerchio: $A = \pi \cdot r^2$
  dove r è il raggio.

PARTE B: GEOMETRIA ANALITICA

1 Il piano cartesiano

Un sistema di riferimento nel piano cartesiano, costituito da due assi ortogonali su cui è stata individuata un'unità di misura, consiste in una associazione biunivoca tra punti del piano e le coppie ordinate di numeri reali (x;y).

Definizione 1.1 Data un'equazione in due incognite $F(x, y) = 0$, si chiama luogo dei punti del piano l'insieme di tutti i punti le cui coordinate soddisfano l'equazione data.

Ricorda

- Per verificare che un punto appartiene a un luogo è sufficiente sostituire le sue coordinate nell'equazione stessa.
- Per calcolare il punto di intersezione di due curve (o rette) è sufficiente trovare le soluzioni comuni alle equazioni, cioè fare il sistema tra le due equazioni.
- La distanza tra due punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ è data da
  $\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$
- Il punto medio del segmento AB è dato da $M(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2})$
- Tutti i punti di un luogo geometrico godono della proprietà di avere per coordinate coppie di numeri che soddisfano una determinata equazione. Viceversa ogni punto del piano le cui coordinate soddisfano una certa equazione appartengono al luogo geometrico.

2 La retta

Un'equazione di primo grado è sempre rappresentata da una retta. Per disegnare una retta basta determinare le coordinate di due suoi punti.
L'equazione generale della retta è $ax + by + c = 0$.
Se $b \neq 0$ si può riscrivere nella forma equivalente $y = mx + q$ dove m è il coefficiente angolare e q l'ordinata all'origine.
Il coefficiente angolare delle rette passanti per A e B è dato da $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
L'ordinata all'origine rappresenta l'ordinata del punto $Q(0; q)$ in cui la retta interseca l'asse y.
Le rette $y = m_1 x + q_1$ e $y = m_2 x + q_2$ sono

- parallele se e solo se $m_1 = m_2$
- perpendicolari se e solo se $m_2 = -\frac{1}{m_1}$.

$y = 4x + q$ rappresenta tutte le rette parallele con coefficiente angolare 4.
$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$ è l'insieme di tutte le rette passanti per lo stesso punto $P(x_1; y_1)$.
L'equazione della retta passante per due punti $P(x_1; y_1)$ e $Q(x_2; y_2)$ è data da $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ quando $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$.
La distanza di un punto $P(x_0; y_0)$ da una retta r di equazione $ax + by + c = 0$ è data da $d = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

2 Le coniche

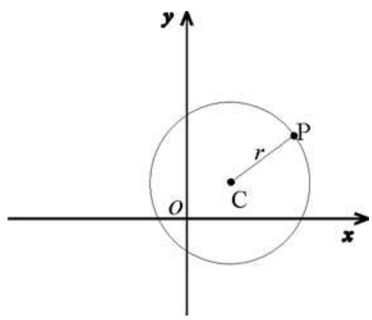
Un'equazione di secondo grado è sempre rappresentata da una conica. Queste curve si chiamano coniche perché sono ottenute tramite l'intersezione di una superficie conica con un piano. Si possono definire tutte come luoghi geometrici e, di conseguenza, ricavarne l'equazione algebrica che le rappresenta nel piano cartesiano. Una conica può essere una circonferenza, un'ellisse, una parabola, un'iperbole.

Circonferenza

La circonferenza è il luogo geometrico dei punti equidistanti da un punto C, detto centro. Si ottiene tagliando un cono con un piano perpendicolare al suo asse. La distanza fra ognuno dei suoi punti e il centro è il raggio della circonferenza.

Note le coordinate del centro $C(\alpha; \beta)$ e la misura r del raggio, l'equazione della circonferenza è $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$.
L'equazione generale della circonferenza è $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ dove a, b e c sono legati alle coordinate del centro $C(\alpha; \beta)$ ed al raggio dalle seguenti relazioni:

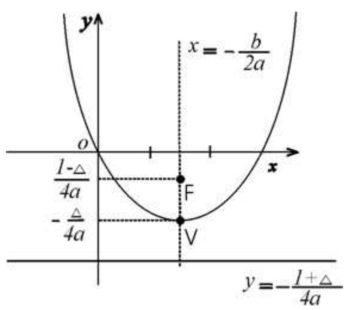
$$\begin{cases} \alpha = -\frac{a}{2} \\ \beta = -\frac{b}{2} \\ r = \sqrt{(-\frac{a}{2})^2 + (-\frac{b}{2})^2 - c} \end{cases} \qquad \begin{cases} a = -2\alpha \\ b = -2\beta \\ c = \alpha^2 + \beta^2 - r^2 \end{cases}$$



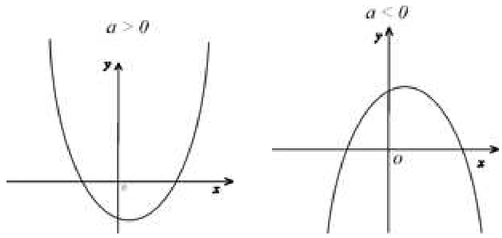
Parabola

La parabola è il luogo geometrico dei punti equidistanti da una retta (direttrice) e da un punto (fuoco).

La retta passante per il fuoco e perpendicolare alla direttrice si chiama asse della parabola. L'asse della parabola è un asse di simmetria e interseca la parabola nel vertice.
Una parabola con asse parallelo all'asse y è rappresentata da un'equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$.



Concavità e apertura della parabola dipendono dal parametro a.



Per l'ellisse e l'iperbole richiamiamo solo brevemente la forma delle loro equazioni e le relazioni che legano le coordinate dei punti caratteristici per la loro determinazione come luoghi geometri.

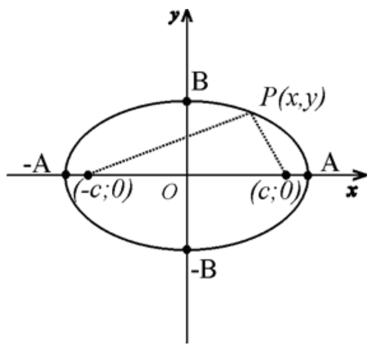
Ellisse
Equazione dell'ellisse riferita al centro degli assi cartesiani $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Centro $O(0; 0)$.

Fuochi $F_1(-c; 0)$ e $F_2 = (c; 0)$ essendo $c^2 = a^2 - b^2$.

Vertici $A(a; 0)$, $B(0; b)$, $-A$, $-B$.

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.



Ricorda
L'eccentricità e indica la forma più o meno schiacciata dell'ellisse: $0 \leq e < 1$. Quanto vale nella circonferenza?

Iperbole
Equazione dell'iperbole riferita al centro degli assi cartesiani $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

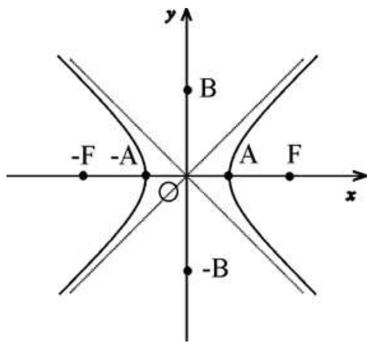
Centro $O(0; 0)$.

Fuochi $F_1(-c; 0)$ e $F_2 = (c; 0)$ essendo $c^2 = a^2 + b^2$.

Vertici $A(a; 0)$, $B(0; b)$, $-A$, $-B$.

Asintoti $y = \pm\frac{b}{a}x$.

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}$.



Per l'iperbole è $e > 1$.

PARTE C: FIGURE SOLIDE

1 I poliedri

Il *volume* è tutto lo spazio interno del poliedro (ovvero, la figura solida).
La *faccia* è, per quanto riguarda un poliedro, ciascuna delle forme geometriche o poligoni che ne delimitano il volume. Le aree di tutte le facce del poliedro, se sommate, danno l'area superficiale del solido.
Lo *spigolo* è il segmento d'intersezione tra due facce poligonali.
Il *vertice* è quel punto in cui almeno tre facce di un poliedro convergono. Esso è formato dall'intersezione di tre o più diversi spigoli.
L'*angolo diedro* è l'angolo tridimensionale formato da due facce e dallo spigolo compreso tra esse.
I poliedri sono divisibili in poliedri regolari, irregolari, prismi e piramidi.

Poliedri regolari

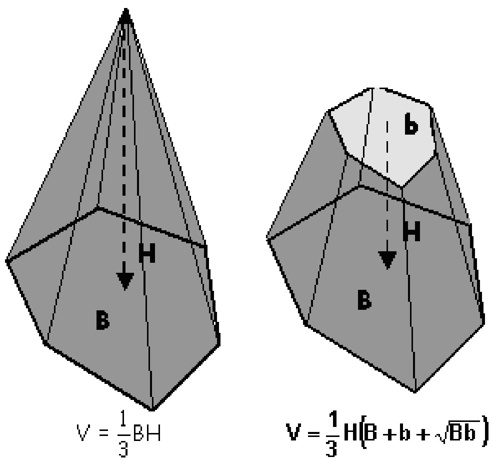
Si dice *poliedro regolare* un poliedro le cui facce sono tutte poligoni regolari e congruenti e i cui angoli diedri sono tutti congruenti.
Si dimostra che vi sono solo 5 poliedri regolari convessi (a meno di isometrie). I cinque poliedri regolari convessi sono chiamati anche solidi platonici. Essi sono: il tetraedro regolare, il cubo (o esaedro regolare), l'ottaedro regolare, il dodecaedro regolare e l'icosaedro regolare. In molti contesti la specificazione "regolare" può essere omessa.
La tabella seguente indica per ogni solido platonico il numero di facce F, di spigoli S, di vertici V, il numero di lati di ogni faccia N, il numero di spigoli che hanno in comune ciascun vertice M.

NOME	F	S	V	N	M	
Tetraedro	4	6	4	3	3	
Cubo o esaedro	6	12	8	4	3	
Ottaedro	8	12	6	3	4	
Dodecaedro	12	30	20	5	3	
Icosaedro	20	30	12	3	5	

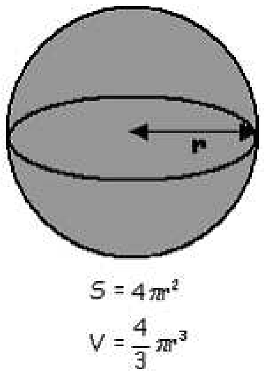
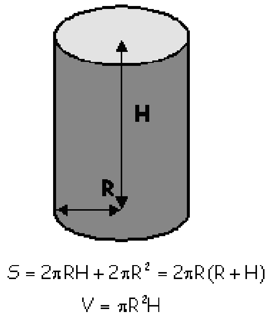
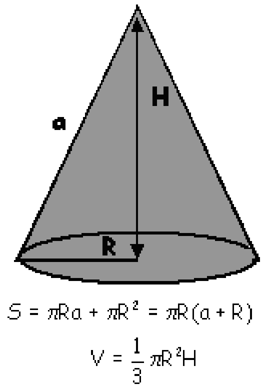
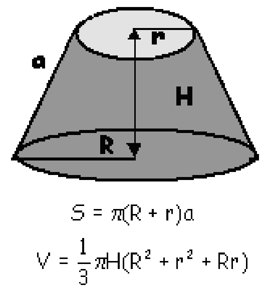
Prisma
Si chiama *prisma* un poliedro individuato da due facce poligonali congruenti appartenenti a due piani paralleli (chiamate basi) collegate da facce (dette facce laterali) in numero uguale al numero di lati delle basi e costituite da parallelogrammi.
Se in particolare le facce laterali sono tutte dei rettangoli il poliedro è chiamato prisma retto; in caso contrario si parla di prisma obliquo. Un prisma (retto od obliquo) le cui basi sono poliedri regolari di n lati è detto prisma n-gonale (prisma triangolare, prisma quadrato, prisma pentagonale, ...).
Un prisma che ha tutte le facce formate da parallelogrammi viene chiamato parallelepipedo (esso ha 6 facce). In particolare un prisma che ha tutte le facce rettangolari viene chiamato prisma rettangolare o parallelepipedo rettangolo.

Piramide
Si chiama *piramide* un poliedro individuato da una faccia poligonale chiamata base e da un vertice che non giace sul piano della base e che talora viene chiamato apice della piramide.
Sono suoi spigoli i lati del poligono di base e i segmenti delimitati dall'apice e da ciascuno dei vertici della base.
Sono facce della piramide la sua base e le facce triangolari che hanno come vertice il suo apice (chiamate facce laterali).
Una piramide avente come base un poligono di n lati (n = 3, 4, ...) si dice 'piramide n-gonale ed ha n+1 facce, 2n spigoli ed n+1 vertici.
Si dice altezza di una piramide il segmento che ha una estremità nell'apice e cade ortogonalmente sul piano contenente la base.
Una piramide si dice retta quando ha per base un poligono circoscrittibile ad un cerchio, il cui centro coincide con il centro dell'altezza.
Si dice apotema di una piramide retta l'altezza di una qualunque delle sue facce laterali.
Tagliando una piramide con un piano (eventualmente parallelo alla base) si ottengono due poliedri, di cui uno è ancora una piramide, l'altro è detto tronco di piramide.

Piramide Tronco di piramide



Solidi di rotazione
I solidi "di rotazione" sono così chiamati perché derivano dalla rotazione di diverse figure geometriche piane, come parabole, cerchi, rettangoli, triangoli ed altre ancora. Tra i solidi di rotazione più importanti ricordiamo la sfera (dal cerchio), il cilindro (dal rettangolo o dal quadrato) ed il cono (dal triangolo).

Sfera	Cilindro	Cono	Tronco di cono
			

Volume di alcuni solidi

- Cubo: $V = s^3$ dove s è la lunghezza dei lati
- Prisma rettangolare: $V = l \cdot h \cdot w$ dove l= lunghezza, h=altezza e w=larghezza
- Qualsiasi prisma avente sezione d'area costante lungo l'altezza: $V = A \cdot h$ dove A=area di base, h=altezza
- Piramide: $V = \frac{A \cdot h}{3}$ dove A=area di base, h=distanza tra le facce
- Cilindro: $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ dove r=raggio del cerchio, h= distanza tra le facce
- Cono: $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$ dove r=raggio del cerchio di base, h=distanza dalla base alla punta
- Sfera: $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ dove r=raggio

Osservazione
Se due solidi sono simili e il rapporto di similitudine lineare è k, allora il rapporto tra due aree corrispondenti è k^2 e tra due volumi corrispondenti è k^3.
Se, ad esempio, due piramidi sono simili e il rapporto tra le due altezze è 2, allora il rapporto tra i due perimetri di base è ancora 2, quello tra le due aree di base è $2^2 = 4$ ed tra i due volumi è $2^3 = 8$.