Quinto modulo: Funzioni 2

Obiettivi

1. conoscere la terminologia e le proprietà dei logaritmi e saperne utilizzare le regole di calcolo
2. saper operare con le funzioni esponenziale e logaritmo per risolvere equazioni e disequazioni
3. conoscere la formula per il cambiamento di base
4. saper convertire la misura di un angolo da gradi in radianti e viceversa
5. conoscere le funzioni goniometriche fondamentali
6. saper utilizzare funzioni trigonometriche note di un certo angolo per trovare funzioni goniometriche di altri angoli
7. conoscere alcune formule (addizione, duplicazione) e saperle utilizzare per trasformare espressioni goniometriche
8. saper utilizzare le proprietà elementari delle funzioni trigonometriche per risolvere equazioni e disequazioni
9. saper risolvere un triangolo rettangolo
10. saper risolvere un triangolo generico

Prerequisiti

1. proprietà delle potenze
2. concetto di equazione e disequazione
3. nozione di angolo e di arco

PARTE A: ESPONENZIALI E LOGARITMI

Potenze con esponente reale
La potenza a^x è definita:

- se $a > 0$, per ogni $x \in \Re$;
- se $a = 0$, per tutti e soli gli $x \in \Re^+$;
- se $a < 0$, per tutti e soli gli $x \in Z$.

Casi particolari:

- $a = 1$, $1^x = 1$ per ogni $x \in \Re$;
- $x = 0$, $a^0 = 1$ per ogni $x \in \Re^+$;

Le proprietà delle potenze definite per esponenti interi valgono anche per esponenti reali.
Se $a > 0$ per ogni x,y appartenenti ad $\Re$ vale:

1. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$;
2. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$;
3. $a^x : a^y = a^{x-y}$;
4. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$;
5. $a^{-x} = (\frac{1}{a})^x = \frac{1}{a^x}$.

Logaritmo
Si chiama logaritmo in base a di b l'unica soluzione dell'equazione esponenziale elementare nel caso determinato, cioè l'esponente x da assegnare alla base a per ottenere il numero b.

$$a^x = b \Longleftrightarrow x = log_a b$$

Il logaritmo risulta essere l'operazione inversa dell'esponenziale e pertanto le limitazioni cui è soggetto l'esponenziale si riflettono sul logaritmo: fissata la base $a > 0$, deve essere $b > 0$.

Casi particolari:

- $log_a 1 = 0$ poichè $a^0 = 1$;
- $log_a a = 1$ poichè $a^1 = a$

Analogamente alle proprietà degli esponenziali valgono le seguenti proprietà dei logaritmi:

1. $log_a x^y = y \cdot log_a x$;
2. $log_a (x \cdot y) = log_a x + log_a y$;
3. $log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y$;
4. $log_a b = \frac{log_c b}{log_c a}$

I logaritmi che compaiono sulle calcolatrici sono in base $a = 10$ oppure $a = e \simeq 2,718$.
$logx$ indica il $log_{10} x$, detto *logaritmo decimale*
lnx ndica il $log_e x$ detto *logaritmo naturale o neperiano.*

Equazioni esponenziali e logaritmiche
Un'equazione si dice esponenziale quando l'incognita compare soltanto nell'esponente di una o più potenze.
L'equazione esponenziale più semplice è del tipo $a^x = b$, con $a > 0$ e $b > 0$.
Un'equazione esponenziale del tipo $a^x = b$ può essere:

- *impossibile* se $b \leq 0$, oppure $b \neq 1$ e $a = 1$;
- *verificata da ogni valore reale di* x se $a = 1$, $b = 1$;
- *determinata* se $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Supponiamo di dover risolvere un'equazione esponenziale $a^x = b$:

- se a e b si scrivono come potenze (razionali) della stessa base, si eguagliano gli esponenti ($2^x = 8 \Longrightarrow 2^x = 2^3 \Longrightarrow x = 3$);

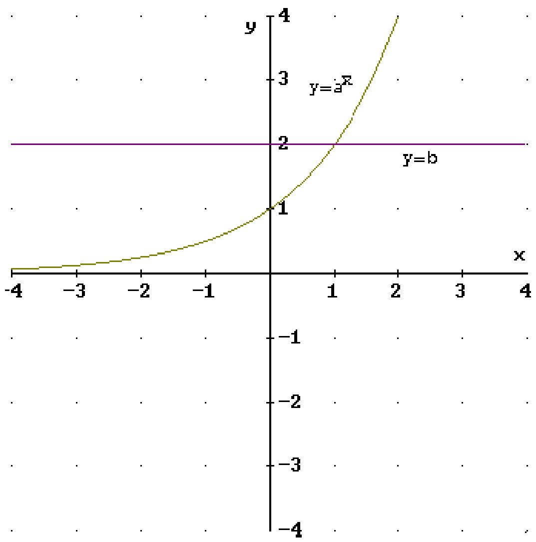
- se a e b non si scrivono come potenze (razionali) della stessa base, le soluzioni si scrivono sotto forma di logaritmi ($2^x = 3 \Longrightarrow x = log_2 3$).

Un'equazione si dice logaritmica quando l'incognita compare soltanto nell'argomento di uno o più logaritmi.
L'equazione logaritmica più semplice è del tipo $log_a x = b$, con $a > 0$ e $b \in \Re$, $x > 0$.
La sua soluzione è $x = a^b$.
Per risolvere un'equazione logaritmica conviene:

1. (quando è possibile) trasformare l'equazione data in una equivalente del tipo $log_a A(x) = log_a B(x)$ applicando le proprietà dei logaritmi
2. determinare le soluzioni dell'equazione $A(x) = B(x)$;
3. eseguire il controllo mediante verifica diretta dei valori di x calcolati al punto 2;
4. in alternativa al punto 3, associare all'equazione di cui al punto 2 tutte le condizioni di esistenza sui logaritmi (ricordiamo che un logaritmo è definito soltanto per valori positivi del suo argomento), per selezionare le soluzioni accettabili.

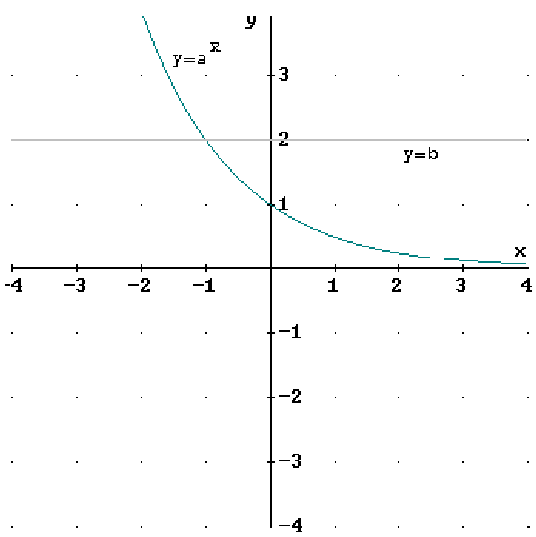
Disequazioni esponenziali e logaritmiche
Le disequazioni esponenziali si presentano nella forma $a^x < b$ oppure $a^x > b$.
Risolvere queste disequazioni significa stabilire per quali valori di x la curva esponenziale si trova rispettivamente al di sotto o al di sopra della retta $y = b$.

se $a > 1$



$a^x > b$ per $x > log_a b$
$a^x < b$ per $x < log_a b$

se $0 < a < 1$



$a^x > b$ per $x < log_a b$
$a^x < b$ per $x > log_a b$

Se $b < 0$ (cioè la retta si trova nel semipiano delle ordinate negative)

- la disequazione $a^x < b$ non ammette soluzioni reali
- la disequazione $a^x > b$ è verificata per ogni valore reale di x

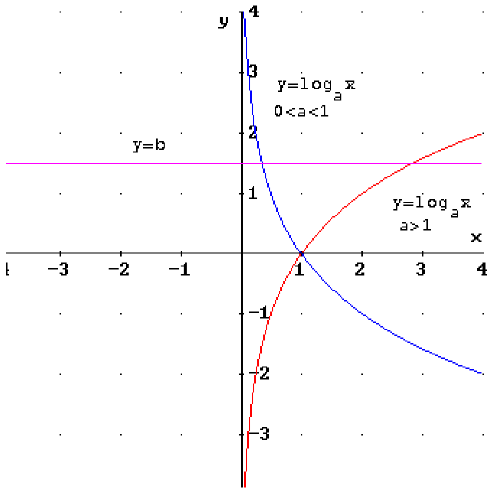
Un discorso analogo vale per le disequazioni logaritmiche.

Il grafico a finco rappresenta i due casi

- $a > 1$
- $0 < a < 1$

$log_a x > b$ oppure $log_a x < b$

hanno soluzioni solo positive ($x > 0$ per l'esistenza del logaritmo), mentre possono avere soluzioni per ogni valore reale di b.



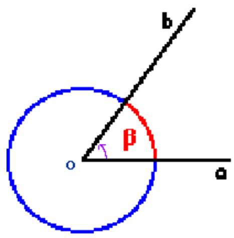
PARTE B: TRIGONOMETRIA

Goniometria

Data una circonferenza avente il centro nel vertice di un angolo, è possibile orientare l'angolo ponendo come verso positivo di percorrenza quello antiorario.

Le principali unità di misura degli angoli piani sono:

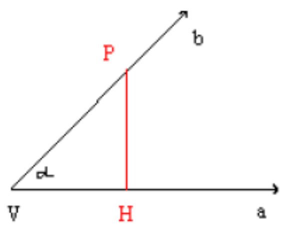
- il grado sessagesimale (*deg* sulle calcolatrici)
- l'angolo radiante (*rad* sulle calcolatrici)



Il radiante è l'angolo al centro di una circonferenza, di raggio arbitrario, che sottende un arco di lunghezza uguale al raggio stesso.
La misura in radianti di un angolo, la cui misura in gradi è $\beta°$, si ottiene come $x = \frac{\pi \cdot \beta°}{180°}$.

La misura in radianti di un angolo è uguale alla misura dell'arco (calcolata rispetto al raggio della circonferenza cui angolo ed arco appartengono).

Consideriamo un angolo orientato di vertice V e lati a e b. Preso su b un punto P arbitrario, purché distinto dal vertice V, proiettiamolo su a: sia H il piede della perpendicolare da P su a.

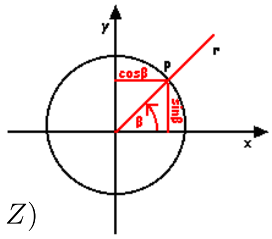


Si ha che

$\frac{HP}{VP} = sin\beta \quad \frac{VH}{VP} = cos\beta \quad \frac{HP}{VH} = tg\beta.$

Introducendo un sistema di riferimento cartesiano si definisce circonferenza goniometrica una circonferenza orientata alla quale è associato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, la cui origine coincide con il centro della circonferenza stessa e la cui unità di misura è assunta uguale al raggio di quest'ultima (circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$).

Detto β l'angolo al centro di una circonferenza goniometrica unitaria, si ha che



- $sen\beta$= ordinata del punto P secondo estremo dell'arco β
- $cos\beta$= ascissa del punto P secondo estremo dell'arco β
- $tg\beta$ (o $tan\beta$)= rapporto, quando esiste, tra il seno e il coseno dell'angolo β (cioè quando $cos\beta \neq 0$, dunque per $\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$)

Valgono le relazioni

- $sen^2\beta + cos^2\beta = 1$
- $tg\beta = \frac{sen\beta}{cos\beta}$

Valori delle funzioni goniometriche di archi particolari

α	$sen\alpha$	$cos\alpha$	$tg\alpha$
$30° = \frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45° = \frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60° = \frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$90° = \frac{\pi}{2}$	1	0	non esiste
$180° = \pi$	0	-1	0
$270° = \frac{3}{2}\pi$	-1	0	non esiste
$0° = 360° = 2\pi$	0	1	0

Principali formule goniometriche

Formule di addizione e sottrazione

$sen(\alpha \pm \beta) = sen\alpha cos\beta \pm cos\alpha sen\beta$

$cos(\alpha \pm \beta) = cos\alpha cos\beta \mp sen\alpha sen\beta$

$tg(\alpha \pm \beta) = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1 \mp tg\alpha tg\beta}$

Formule di duplicazione

$sen2\alpha = 2sen\alpha cos\alpha$

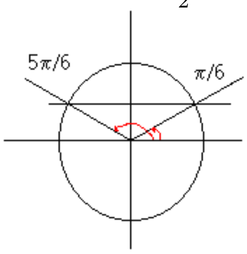
$cos2\alpha = cos^2\alpha - sen^2\alpha$

$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

Equazioni goniometriche

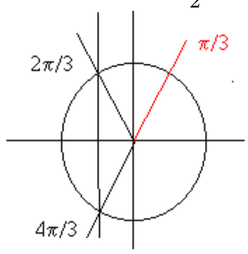
Le equazioni $senx = h$ e $cosx = h$ con $h \in [-1, 1]$ si risolvono intersecando la circonferenza goniometrica rispettivamente con le equazioni $y = h$ e $x = h$.

$senx = \frac{1}{2}$



$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$
$x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$, con $k \in Z$

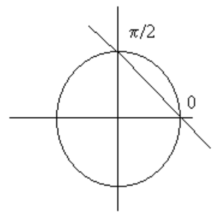
$cosx = -\frac{1}{2}$



$x = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$
$x = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$, con $k \in Z$

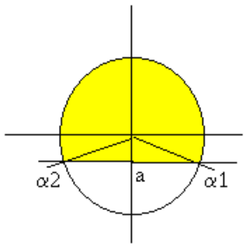
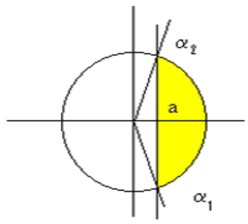
Le equazioni lineari $asenx + bcosx = h$ si risolvono intersecando la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$ con l'equazione della retta $ay + bx = h$.

$senx + cosx = 1$
Si pone $y = senx$, $x = cosx$ e si interseca la retta $y = -x + 1$ così ottenuta con la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$.
Si ottengono i punti $(0, 1)$ e $(1, 0)$ che corrispondono alle soluzioni $x = 0 + 2k\pi$ e $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ con $k \in Z$.



Disequazioni goniometriche

di primo grado

$senx > a$ con $-1 < a < 1$ $\alpha_1 + 2k\pi < x < \alpha_2 + 2k\pi$ con $k \in Z$  	$cosx > a$ con $-1 < a < 1$ $\alpha_1 + 2k\pi < x < \alpha_2 + 2k\pi$ con $k \in Z$ 
$senx < a$ con $-1 < a < 1$ ha come soluzione la parte del grafico non evidenziata $\alpha_2 + 2k\pi < x < \alpha_1 + 2k\pi$ con $k \in Z$	$cosx < a$ con $-1 < a < 1$ ha come soluzione la parte del grafico non evidenziata $\alpha_2 + 2k\pi < x < \alpha_1 + 2k\pi$ con $k \in Z$

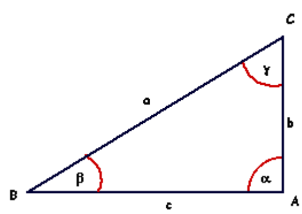
Le disequazioni $senx > a$ e $cosx > a$ con $a < -1$ sono verificate $\forall x$, con $a > 1$ non sono mai verificate. Identicamente le disequazioni $senx < a$ e $cosx < a$ con $a < -1$ non sono mai verificate e con $a > 1$ sono verificate $\forall x$.

di secondo grado
Si risolvono come le disequazioni algebriche di secondo grado, scegliendo gli intervalli interni o esterni alle soluzioni trovate, e si ottengono così delle disequazioni goniometriche di primo grado che si risolvono come precedentemente visto.

Trigonometria

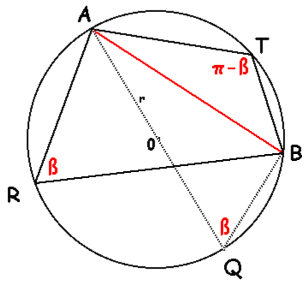
Relazioni tra gli elementi di un triangolo rettangolo

$b = a \cdot sen\beta \quad c = a \cdot sen\gamma$
$b = a \cdot cos\gamma \quad c = a \cdot cos\beta$
$b = c \cdot tg\beta \quad c = b \cdot tg\gamma$

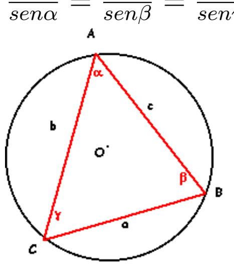


Teorema della corda

La misura di una corda di una circonferenza è uguale al prodotto tra la misura del diametro ed il seno di uno qualunque degli angoli alla circonferenza che insistono su uno dei due archi sottesi dalla corda: $AB = 2r \cdot sen\beta$. Si osserva che gli angoli ATB e AQB sono supplementari (angoli opposti di un quadrilatero inscritto in una circonferenza), quindi hanno lo stesso seno.



Relazione tra gli elementi di un triangolo qualsiasi

Teorema dei seni	Teorema del coseno
In un triangolo qualunque è costante il rapporto tra la misura di un lato ed il seno dell'angolo opposto $\frac{a}{sen\alpha} = \frac{b}{sen\beta} = \frac{c}{sen\gamma}$ 	In un triangolo qualsiasi, il quadrato della misura di ogni lato è uguale alla somma dei quadrati delle misure degli altri due, diminuita del doppio prodotto delle misure di questi per il coseno dell'angolo tra essi compreso $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos\alpha$