Sesto modulo: Logica
Obiettivi

1. individuare dei "calcoli logici" che consentano di meccanizzare l'attività deduttiva
2. stabilire quali ragionamenti sono corretti e quali no
3. distinguere tra condizione necessaria e condizione sufficiente
4. saper riconoscere e trasformare le negazioni di quantificatori e quelle di predicati quantificati

1 Logica delle proposizioni

Scopo della logica matematica è analizzare e formalizzare i metodi corretti di ragionamento.
I suoi elementi costitutivi sono *proposizioni* (o affermazioni o enunciati) che hanno la caratteristica di assumere un e un solo valore di verità, *vero* (V) o *falso* (F).
Esempi di enunciati sono:

- "3 è un numero naturale"
- "2+2≥5"
- "Socrate è un uomo"

Gli enunciati vengono indicati con lettere come p, q, r ecc.
Le proposizioni possono essere negate oppure legate tra loro per originare proposizioni complesse.
I termini di collegamento sono gli operatori logici (o connettivi):

negazione "non" $\neg$

congiunzione "e" $\wedge$

disgiunzione inclusiva "o" (nel senso di vel) $\vee$

condizionale "se..., allora..." $\longrightarrow$

bicondizionale "se e solo se" $\longleftrightarrow$

Gli operatori logici sono caratterizzati dalle seguenti tavole di verità:

p	¬p
V	F
F	V

p	q	p∧q	p∨q	p⟶q	p⟷q
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Osservazione 1.1 La disgiunzione può essere di due tipi, *inclusiva* o *esclusiva.* Quest'ultima intende la "o" nel senso di *aut*, ovvero considera la proposizione vera solo quando una sola delle componenti è vera.
Osservazione 1.2 Mediante i connettivi ¬, ∧ e ∨ si possono definire tutti gli altri. Ad esempio p⟶q coincide con ¬(p∧¬q).
Osservazione 1.3 L'ordine di priorità dei connettivi, a meno di utilizzare le parentesi, dà la precedenza al ¬, poi ∧ e ∨, infine ⟶ e ⟷.
Quando due proposizioni vengono legate usando i connettivi logici, il valore di verità della proposizione che ne risulta dipende dal valore di verità delle proposizioni componenti, secondo le regole delle tavole di verità.
Esempio Scrivere la tavola di verità di (p∧¬q)∨¬(p⟷q).

p	q	(p	∧	¬	q)	∨	¬	(p	⟷	q)
V	V	V	F	F	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	F	V	V	V	F	F
F	V	F	F	F	V	V	V	F	F	V
F	F	F	F	V	F	F	F	F	V	F
		(1)	(3)	(2)	(1)	(4)	(3)	(1)	(2)	(1)

Nelle argomentazioni logiche si fa uso di *regole di deduzione* o di *inferenza*, cioè di regole logiche che precisano il corretto modo di ragionare.
Se utilizziamo le tavole di verità per verificare la *validità* di una forma argomentativa, occorre ricordare che l'inferenza è valida se è impossibile che la sua conclusione sia falsa e le sue premesse vere.
Analizziamo, con l'aiuto di Socrate, alcuni semplici esempi di inferenze.

1. Se io sono colpevole, allora devo essere punito; io sono colpevole. Quindi devo essere punito.
   Pongo p="io sono colpevole" e q="devo essere punito" e passo alla forma logica $p \rightarrow q,\ p \vdash q$.
   La regola di inferenza, *modus ponens*, è logicamente corretta.

p	q	p→q	p	⊢q
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	V
F	F	V	F	F

2. Se io sono colpevole, allora devo essere punito; ma io non sono colpevole, dunque non devo essere punito.

Passo alla forma logica $p \to q, \neg p \vdash \neg q$.
L'inferenza, *fallacia della negazione dell'antecedente*, non è logicamente corretta.

p	q	p→q	¬p	⊢ ¬q
V	V	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	V	V

Si può desumere la non correttezza dell'inferenza anche dal seguente controesempio: "Se una figura è un quadrato, allora ha quattro lati; ma non è un quadrato, quindi non ha quattro lati". La conclusione è falsa se la figura è, ad esempio, un trapezio.

3. Se io sono colpevole, allora io devo essere punito; ma io non devo essere punito, dunque non sono colpevole.
   La forma logica corrispondente è $p \to q, \neg q \vdash \neg p$.
   Verifica che questa regola di inferenza, *modus tollens*, è logicamente corretta.

4. Se io sono colpevole, allora devo essere punito; devo essere punito. Quindi sono colpevole.
   Passo alla forma logica $p \to q, q \vdash p$.
   Verifica che l'inferenza, *fallacia dell'affermazione del conseguente*, non è logicamente corretta.
   Si può desumere la non correttezza dell'inferenza anche dal seguente controesempio: "Se Carlo è genovese, allora Carlo è ligure. Carlo è ligure, quindi è genovese". La conclusione è falsa se Carlo è, ad esempio, di Savona.

2 Condizione necessaria e sufficiente

L'implicazione $p \longrightarrow q$ spesso si legge "p è *condizione sufficiente* perchè valga q" oppure "q è *condizione necessaria* perchè valga p".
La doppia implicazione $p \longleftrightarrow q$, che esprime l'equivalenza logica delle due proposizioni p e q, si legge "*condizione necessaria e sufficiente* perchè valga p è che valga q".
Osservazione 2.1 Una condizione *necessaria* per l'accadere di un dato evento è una circostanza in *assenza* della quale l'evento *non può* accadere.
Per esempio la presenza dell'ossigeno è condizione necessaria perchè avvenga la combustione; se la combustione avviene, allora l'ossigeno deve essere stato presente, perchè in assenza di esso non ci sarebbe stata combustione.

Osservazione 2.2 Una condizione *sufficiente* per l'accadere di un evento è una circostanza in *presenza* della quale l'evento *deve* accadere.
Ad esempio, la presenza dell'ossigeno non è condizione sufficiente alla combustione, perchè l'ossigeno può essere presente senza che la combustione avvenga.
Esempio 2.1 Siano date le proposizioni p: "n è un numero pari" e q: "n ha come ultima cifra 2".
p non è condizione sufficiente per q.
p è condizione necessaria per q.
q è condizione sufficiente per p.
q non è condizione necessaria per p.
Esempio 2.2 Siano date le proposizioni p: "Il quadrilatero ABCD è un quadrato" e q: "Il quadrilatero ABCD ha i lati congruenti".
p è condizione sufficiente per q.
p non è condizione necessaria per q.
q non è condizione sufficiente per p.
q è condizione necessaria per p.
Esempio 2.3 Siano date le proposizioni p: "ABC triangolo isoscele" e q: "ABC è un triangolo con gli angoli alla base congruenti".
p è condizione sufficiente per q.
p è condizione necessaria per q.
q è condizione sufficiente per q.
q è condizione necessaria per p.

2 Logica dei predicati

Una logica basata solo sugli enunciati è insufficiente; occorre introdurre il concetto di *predicato*, una proposizione contenente una o più *variabili* o argomenti.
Un predicato si dice *unario* se riguarda solo una variabile e si indica con una scrittura del tipo $p(x)$.
Esempi di predicati unari:

- $p(x)$: "x è un uomo"
- $p(x)$: "x è un numero reale ≥ 1"

Analogamente, un predicato si dirà *binario*, *ternario*, ecc. se riguarda 2, 3 o più argomenti.
Esempi di predicati binari e ternari:

- $p(x, y)$: "$x \geq y$ con $x, y \in R$
- $p(x, y, z)$: "$\cos(x + y) = z$" con $x, y, z \in R$

Se fissiamo tutte le variabili, il predicato diventa una proposizione che può essere vera o falsa.
A partire da predicati noti si possono costruire nuovi predicati usando le parentesi e i connettivi logici.
Un altro modo per introdurre nuovi predicati è l'applicazione di quantificatori:

- *quantificatore universale* indicato con il simbolo $\forall$ *per ogni*
- *quantificatore esistenziale* indicato con il simbolo $\exists$ *esiste*

Esempio 3.1 Se $p(x) =$ è un predicato unario, allora

1. "per ogni x è vera $p(x)$", oppure "tutti gli x godono della proprietà $p(x)$" si scrive $\forall x : p(x)$
2. "per ogni x non è vera $p(x)$, ovvero "nessun x gode della proprietà $p(x)$" si scrive $\forall x : \neg p(x)$
3. "esiste almeno un x per il quale è vera $p(x)$" si scrive con $\exists x : p(x)$
4. "esiste almeno un x per il quale non è vera $p(x)$" si scrive con $\exists x : \neg p(x)$

Esistono regole logiche che regolano i rapporti fra quantificatori e negazione:

1. $\boxed{\neg \forall x : p(x) \text{ equivale a } \exists x : \neg p(x)}$
   La negazione della proposizione "Tutti i lombardi sono milanesi" non è "Nessun lombardo è milanese", ma è espressa dalla proposizione "Esistono dei lombardi che non sono milanesi".
2. $\boxed{\neg \exists x : p(x) \text{ equivale a } \forall x : \neg p(x)}$
   La negazione della proposizione "Esiste un lombardo che è veneto" è espressa dalla proposizione "Nessun lombardo è veneto".
3. $\boxed{\neg \forall x : \neg p(x) \text{ equivale a } \exists x : p(x)}$
   La negazione della proposizione "Nessun italiano è buddista" è espressa dalla proposizione "Esistono degli italiani che sono buddisti".
4. $\boxed{\neg \exists x : \neg p(x) \text{ equivale a } \forall x : p(x)}$
   La negazione della proposizione "Esiste un milanese che non è lombardo" è espressa dalla proposizione "Tutti i milanesi sono lombardi".

Osservazione 3.1 E' infine utile ricordare che la negazione di proposizioni composte implica lo scambio dei connettivi:

- $\boxed{\neg(p \vee q) \text{ equivale a } \neg p \wedge \neg q}$
- $\boxed{\neg(p \wedge q) \text{ equivale a } \neg p \vee \neg q}$